$$Q = (23{,}985042 + 4{,}002603 - 1{,}007825 - 26{,}981539) \times 931{,}48$$
$$= -1{,}6012 \text{ MeV} \Rightarrow \underbrace{T_1}_{\text{de } \alpha} = +1{,}868 \text{ MeV}$$

5) ^{27}Al dans l'état excité $E_{exc} = 2{,}212$ MeV $\Rightarrow T_1 = +4{,}450$ MeV.

3) Réaction à haute énergie

Rappel : quadrivecteur Impulsion-Energie $\tilde{p} = (E, \vec{p}c)$

$\vec{p}$: q^té de mouvement total.

E : énergie totale

$$\tilde{p}^2 = E^2 - p^2c^2 = m^2c^4$$

on a de m^ conservation de la q^té de mvt $\Rightarrow \sum \tilde{p}_i = \sum \tilde{p}_f$.

→ Expression relativiste de l'énergie seuil

Avant la collision dans [L] : $\tilde{p}_i = (T_1 + m_1c^2 + m_2c^2 ; \vec{p}_1 c)$

Après la collision dans [CM] : $\tilde{p}_f^* = (\sum m_k c^2, \vec{0})$

or $\underset{(\text{inv})}{\tilde{p}_i^2 = \tilde{p}_f^{*2}} \Rightarrow (T_1 + m_1c^2 + m_2c^2)^2 - p_1^2c^2 = \left(\sum m_k c^2\right)^2$

$$(m_1c^2 + m_2c^2)^2 + 2T_1(m_1c^2 + m_2c^2) + T_1^2 - p_1^2c^2 = \left(\sum m_k c^2\right)^2$$
$$\cancel{2T_1 m_1 c^2} + 2T_1 m_2 c^2 + \cancel{T_1^2 - p_1^2c^2} = \left(\sum m_k c^2\right)^2 - (m_1c^2 + m_2c^2)^2$$

or $E_1^2 = m_1^2c^4 + p_1^2c^2 = (T_1 + m_1c^2)^2 = T_1^2 + 2T_1m_1c^2 + m_1^2c^4$

$$\Rightarrow p_1^2c^2 = T_1^2 + 2T_1m_1c^2$$

soit $2T_1m_2c^2 = \left(\sum m_k c^2\right)^2 - (m_1c^2 + m_2c^2)^2 \Rightarrow T_1 = \dfrac{\left(\sum m_k c^2\right)^2 - (m_1c^2 + m_2c^2)^2}{2m_2c^2}$

→ Retrouver le résultat à basse énergie.

$$T_1 = \frac{1}{2m_2c^2}\left(\sum m_k c^2 - (m_1c^2 + m_2c^2)\right)\left(\sum m_k c^2 + (m_1c^2 + m_2c^2)\right)$$

Basse énergie $\Rightarrow T \ll E (\sim mc^2)$

$$\rightarrow m_1c^2 + m_2c^2 \simeq \sum m_k c^2$$

donc $\sum m_k c^2 + m_1c^2 + m_2c^2 \simeq 2(m_1c^2 + m_2c^2)$

on réécrit $T_1 \simeq \frac{1}{\cancel{2}m_2\cancel{c^2}} \cancel{2}(m_1\cancel{c^2} + m_2\cancel{c^2}) \underbrace{\left(\sum m_k c^2 - (m_1c^2 + m_2c^2)\right)}_{-Q} = -Q \underbrace{\frac{(m_1+m_2)}{m_2}}_{\text{idem à précédemment}}$

→ Cas particulier : Création d'une masse M en une ou plusieurs particules (particules voie entrée de voie de sortie)

$$(1) + (2) \rightarrow (1) + (2) + (M) \quad \left(\sum m_k c^2 = m_1c^2 + m_2c^2 + Mc^2\right)$$

Formule relativiste $\Rightarrow T_1 = \frac{1}{2m_2c^2} (m_1c^2 + m_2c^2 + Mc^2)^2 - (m_1c^2 + m_2c^2)^2$

$$= \frac{2Mc^2(m_1c^2 + m_2c^2) + M^2c^4}{2m_2c^2} = Mc^2 \frac{2(m_1c^2 + m_2c^2) + Mc^2}{2m_2c^2}$$

→ Cas particulier (1) $= \gamma$ $\quad m_1 = 0 \quad T_1 = E_1 = \frac{\left(\sum m_k c^2\right)^2 - m_2^2c^4}{2m_2c^2}$

4) Application numérique

a) $\underset{\text{incident}}{\pi^-} + \underset{\text{au repos}}{p} \rightarrow \Lambda^0 + K^0$

$$T_{\pi^-} = \frac{(m_{\Lambda^0}c^2 + m_{K^0}c^2)^2 - (m_{\pi^-}c^2 + m_pc^2)^2}{2m_pc^2}$$

AN : $T_{\pi^-} = 767{,}84\ \text{MeV}$

b) $p + p \rightarrow p + p + p + \bar{p}$ $\quad$ avec $m_p = m_{\bar{p}}$

$$T_p = 2m_pc^2 \left[\frac{2 \times 2m_pc^2 + 2m_pc^2}{2m_pc^2}\right] = 6m_pc^2$$

AN : $T_p = 5{,}63\ \text{GeV}$

c) $\gamma + {}^2D \rightarrow n + p$

$E_\gamma = \frac{(m_nc^2 + m_pc^2)^2 - m_{2D}^2c^4}{2m_{2D}c^2} \Rightarrow E_\gamma = 2{,}226\ \text{MeV}$

S5– 13. Oscillateur en dynamique d'Einstein

1. En dynamique newtonienne, l'équation différentielle du mouvement s'obtient aisément à partir de l'énergie, puisque la seule force dérive de l'énergie potentielle $\mathcal{E}_p = Kx^2/2$:

$$\mathcal{E}_k + \mathcal{E}_p = \text{Cte} \quad \text{avec} \quad \mathcal{E}_k = \frac{mv^2}{2} \quad \text{d'où} \quad \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{Kx^2}{2} = \text{Cte}$$

En dérivant par rapport au temps, on trouve :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \left(\frac{K}{m}\right)^{1/2} \quad \text{et} \quad T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

La solution est :

$$x = C\cos(\omega_0 t + \phi) \quad \text{soit} \quad x = A\cos(\omega t)$$

compte tenu des conditions particulières : $\dot{x} = 0 = -\omega_0 C \sin\phi$, c'est-à-dire $\phi = 0$ et $x_M = C = A$. La somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle de l'oscillateur est donc :

$$\frac{m\omega_0^2 A^2}{2}\sin^2(\omega_0 t) + \frac{KA^2}{2}\cos^2(\omega_0 t) = \frac{KA^2}{2}$$

2. En dynamique d'Einstein, le théorème de l'énergie donne :

$$(\gamma - 1)mc^2 + mc^2 + \frac{Kx^2}{2} = 0 + mc^2 + \frac{KA^2}{2} \quad \text{d'où} \quad \gamma = 1 + \frac{K(A^2 - x^2)}{2mc^2}$$

On en déduit v :

$$v = c\left(1 - \frac{1}{\gamma^2}\right)^{1/2} = c\left\{1 - \frac{1}{[1 + K(A^2 - x^2)/(2mc^2)]^2}\right\}^{1/2}$$

3. Si l'on introduit θ , on trouve :

$$v = c\left\{1 - \frac{1}{[1 + KA^2\sin^2\theta/(2mc^2)]^2}\right\}^{1/2} = c\,\frac{[KA^2\sin^2\theta/(mc^2)[1 + KA^2\sin^2\theta/(4mc^2)]^{1/2}}{1 + KA^2\sin^2\theta/(2mc^2)}$$

Or :

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = -A\sin\theta\,\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

On a donc, en tenant compte du signe des variations de $\dot{x}$ et $\dot{\theta}$:

$$A\sin\theta\,\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = c\,\frac{K^{1/2}A\sin\theta/(mc^2)^{1/2}[1 + KA^2\sin^2\theta/(4mc^2)]^{1/2}}{1 + KA^2\sin^2\theta/(2mc^2)}$$

On en déduit :

$$\mathrm{d}t = \frac{1}{\omega_0}\frac{1 + KA^2\sin^2\theta/(2mc^2)}{[1 + KA^2\sin^2\theta/(4mc^2)]}\,\mathrm{d}\theta \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \left(\frac{K}{m}\right)^{1/2}$$

En intégrant entre 0 et $\pi/2$, on trouve la période :

$$T = \frac{4}{\omega_0}\int_0^{\pi/2}\frac{1 + KA^2\sin^2\theta/(2mc^2)}{[1 + KA^2\sin^2\theta/(4mc^2)]}\,\mathrm{d}\theta$$

Par conséquent, le facteur α vaut :

$$\alpha = \frac{KA^2}{4mc^2} = 0,5 \quad \text{puisque} \quad \frac{KA^2}{2} = mc^2$$

Notons qu'en faisant c infini, $\alpha = 0$, d'où la période $T_0 = 2\pi/\omega_0$ de l'oscillateur harmonique newtoı